



Restauration Markovienne d'Images

M. Karpe¹ A. Sadaca¹ N. Soussi¹ and C. Zeng¹

¹Département de Première Année
École Nationale des Ponts et Chaussées

Projet d'Initiation à la Recherche, 2017



- 1 Introduction : De la finance au traitement d'images
- 2 Modélisation mathématique
- 3 Modèle physique
- 4 Implémentation numérique

- Finance quantitative : Régulation des marchés de change
- Théorie des jauges, Espaces fibrés
- Remise en cause de notre sujet



École des Ponts
ParisTech

De l'intérêt de la restauration d'images

Restauration
Markovienne
d'Images

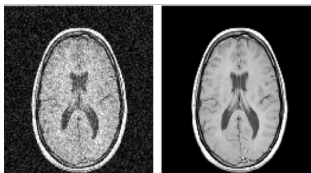
M. Karpe, A.
Sadaca, N.
Soussi, and
C. Zeng

Introduction :
De la finance
au traitement
d'images

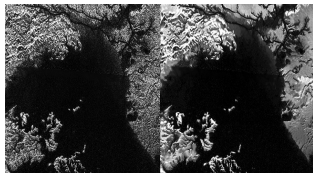
Modélisation
mathématique

Modèle
physique

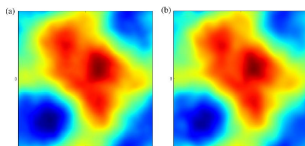
Implémentation
numérique



(a) IRM cérébrale [1]



(b) Surface de Titan [2]



(c) Reconstruction d'un signal
diffus avec MAP [3]

[1] J. Imaging 2015, 1(1), 60-84 ; DOI :10.3390/jimaging1010060

[2] NASA/JPL-Caltech/ASI

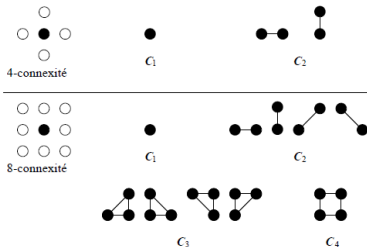
[3] Astronomy & Astrophysics 574, A74 (2015) DOI : 10.1051/0004-6361/201323006

- Champs de Markov : $P(x_i|S_i) = P(x_i|N_i)$

- Champs de Gibbs : $P(X = x) = \frac{\exp(-U(x))}{Z}$

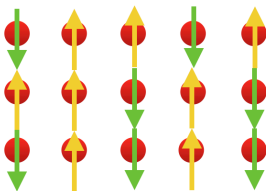
Théorème de Hammersley-Clifford

Tout champ de Markov est un champ de Gibbs.

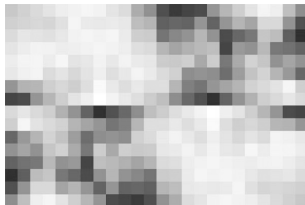


(d) Représentation de cliques

$$\blacksquare P(X_i = x_i | N_i) = \frac{\exp(-U_i(x_i | N_i))}{\sum_{a_i \in N_i} \exp(-U_i(a_i | V_i))}$$



(e) Assemblée de spins



(f) Tableau de pixels



- Réseau régulier et infini
- N spins $s_i = \pm 1$
- Champ extérieur h
- Interactions d'intensité $J > 0$ entre chaque spin et ses plus proches voisins

Energie totale

$$E(s_1, s_2, \dots, s_N) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - h \sum_i s_i \quad (1)$$



Des propriétés critiques

Restauration
Markovienne
d'Images

M. Karpe, A.
Sadaca, N.
Soussi, and
C. Zeng

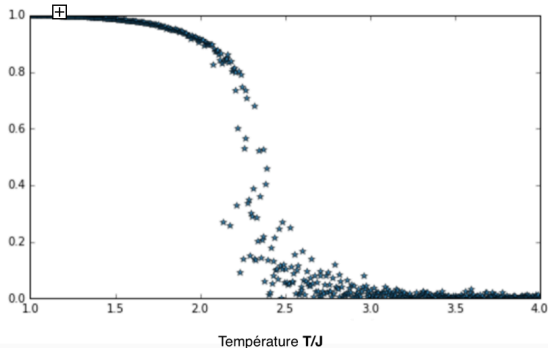
Introduction :
De la finance
au traitement
d'images

Modélisation
mathématique

Modèle
physique

Implémentation
numérique

Aimantation spontanée $|m|$



$$\text{Résultat d'Onsager : } \frac{T_c}{J} = 2.263$$



Hypothèses

- Champ magnétique extérieur nul : $h = 0$
- Existence d'interactions avec les 4 plus proches voisins

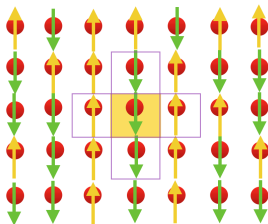
$$E(s_1, s_2, \dots, s_N) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j$$

où $s_i = \pm 1$ et J est le paramètre de couplage d'Ising-Heisenberg

- Résultats obtenus par résolution graphique :

$$\frac{T_c}{J} = 2.898$$

$$\epsilon = \frac{2.899 - 2.269}{2.269} = 27.8\%$$



Notations

- Champs de Markov
- $P(x_s | S_s) = P(x_s | N_s)$

- Théorème de Hammersley-Clifford & Distribution de probabilité
- $P(x_s | S_s) = P(x_s | N_s) = \frac{1}{Z_{N_s}} \exp\left(\frac{-U(x_s | N_s)}{k_B T}\right)$
- $U(x_s | N_s)$: somme des termes énergétiques impliquant le site s selon la configuration du voisinage N_s
- $Z_{N_s} = \sum_{\{x_s\}} \exp\left(\frac{-U(x_s | N_s)}{k_B T}\right)$

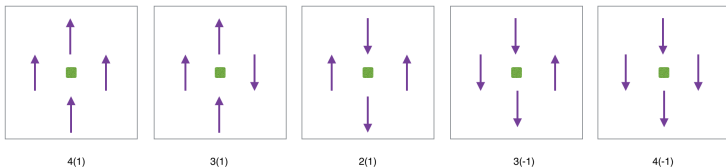
- $p = P(x_s = 1)$

Formule de Bayes

$$p = P(x_s = 1) = \sum_{\{N_s\}} P(x_s = 1_s) P(N_s)$$

$$p = \sum_{\{N_s\}} \frac{\exp\left(\frac{-U(x_s|N_s)}{k_B T}\right)}{Z_{N_s}} P(N_s)$$

- Notation : $i(j)$ et $K = \frac{2J}{k_B T}$



$$p = \sum_k P[k(\pm 1)] \binom{4}{k} \frac{e^{kK}}{e^{kK} + e^{(4-k)K}}$$

Hypothèses supplémentaires

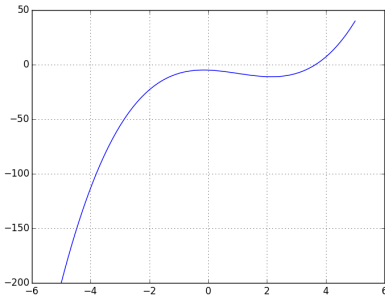
- (forte) Décorrélation des spins du voisinage N_s
- (faible) Invariance de la probabilité p par translation sur le réseau de spins

- $x_s \sim \mathcal{B}(p)$
- $N_s \sim \mathcal{B}(4, p)$
- $p = \sum_k P[k(\pm 1)] \binom{4}{k} \frac{e^{kK}}{e^{kK} + e^{(4-k)K}}$

Equation

$$p = \phi(p) = \frac{e^{4K}}{1 + e^{4K}} p^4 + \binom{4}{1} \frac{e^{3K}}{e^K + e^{3K}} p^3 (1 - p) +$$

$$\binom{4}{2} \frac{e^{2K}}{2e^{2K}} p^2 (1 - p)^2 + \binom{4}{3} \frac{e^K}{e^K + e^{3K}} p (1 - p)^3 + \frac{1}{1 + e^{4K}} (1 - p)^4$$



$$\exp(2K_c) = 3.649$$

$$\frac{T_c}{J} = 2.269$$

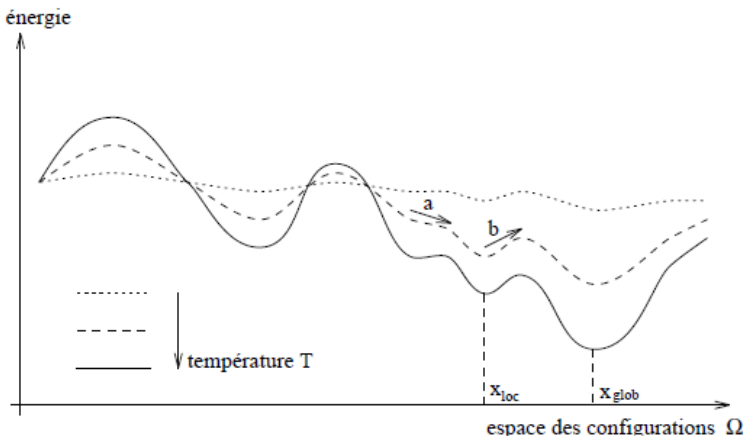


■ Modèle de Potts

$$U(x) = \beta \sum_{c=(s,t) \in C} (\mathbf{1}_{\{x_s \neq x_t\}} - \mathbf{1}_{\{x_s = x_t\}})$$

■ Modèle markovien gaussien

$$U(x) = \underbrace{\beta \sum_{c=(s,t) \in C} (x_s - x_t)^2}_{\text{faible différence entre pixels voisins}} + \underbrace{\alpha \sum_{s \in S} (x_s - \mu_s)^2}_{\text{attache aux données}}$$



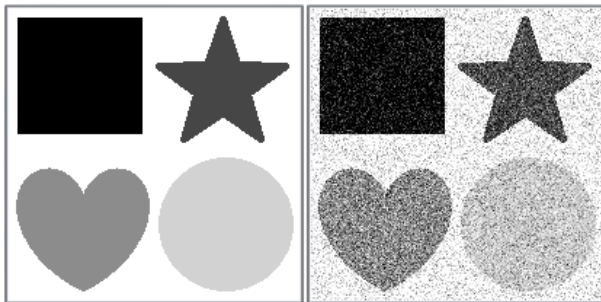
a : $\Delta U < 0$, transition acceptée

b : $\Delta U > 0$, transition selon une probabilité $p = \exp(-\Delta U/T)$

- Échantillonneur de Gibbs

- Algorithme de Metropolis : $\lambda \in E = \llbracket 0, 255 \rrbracket$

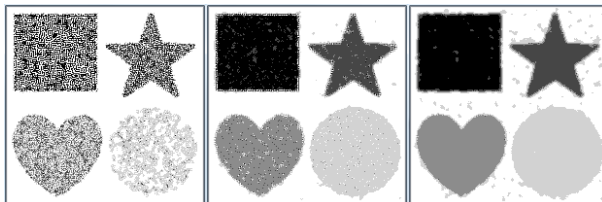
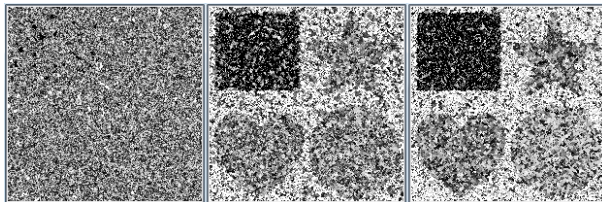
$$\Delta U = U_s(\lambda | V_s^{(n-1)}) - U_s(x_s^{(n-1)} | V_s^{(n-1)})$$



$$SNR = 10 \log \left(\frac{\sum_{s \in S} x_s^2}{\sum_{s \in S} (y_s - x_s)^2} \right)$$

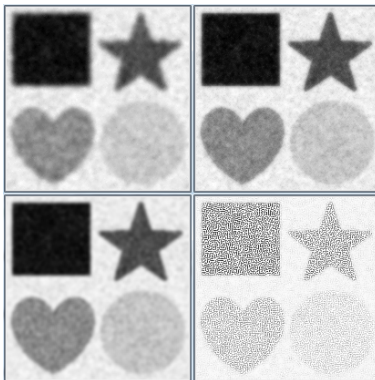


■ Modèle de Potts



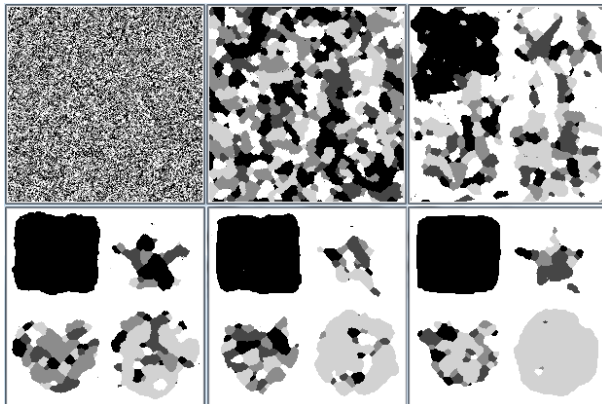


■ Modèle markovien gaussien



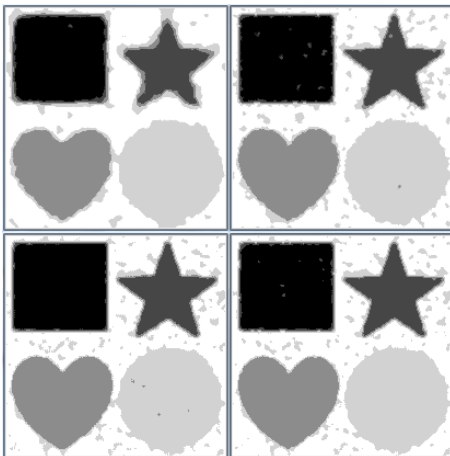


■ Modèle de Potts



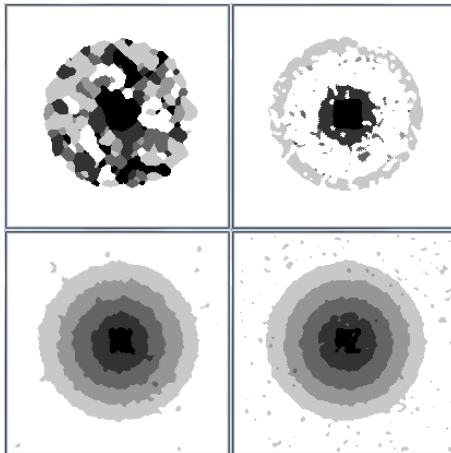


■ Modèle markovien gaussien





■ Image présentant des dégradés








■ Photo comportant 256 nuances de gris





Notre modèle simple donne de bons résultats sur des images
"simples" !

-  M. Sigelle et F. Tupin.
Champs de Markov en Traitement d'Image.
École Nationale Supérieure des Télécommunications, 1999.
-  F. Chevoir.
Cours de Physique Statistique.
École Nationale des Ponts et Chaussées.
-  M. Sigelle et A. Maruani.
Critical Properties of the 2D Ising Model : A Markovian
Approach.
Maximum Properties and Bayesian Methods, 389 – 392,
Kluwer Academic Publishers, 1992.