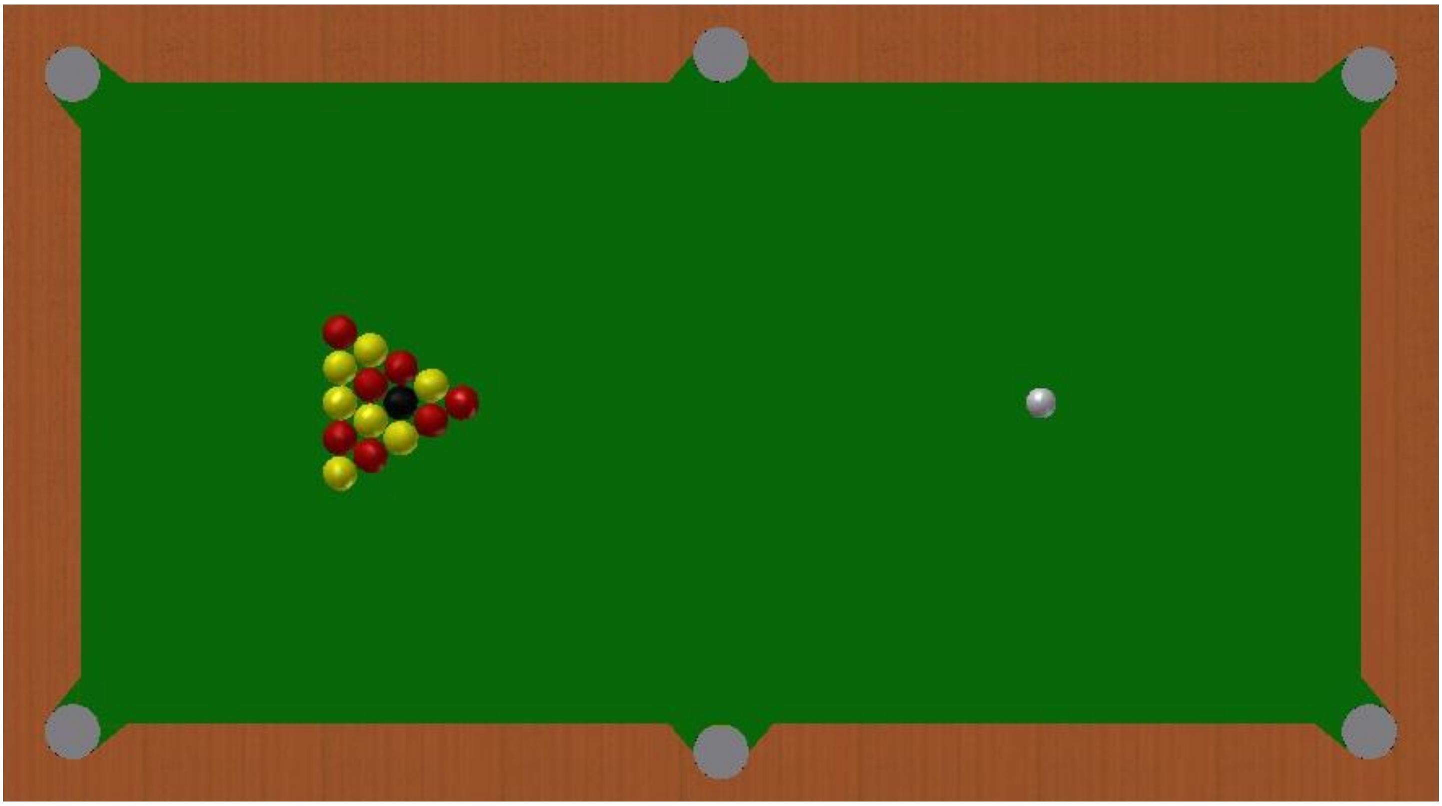
Recherche de la trajectoire parfaite au billard anglais.

Comment empocher à coup sûr une bille de billard ?

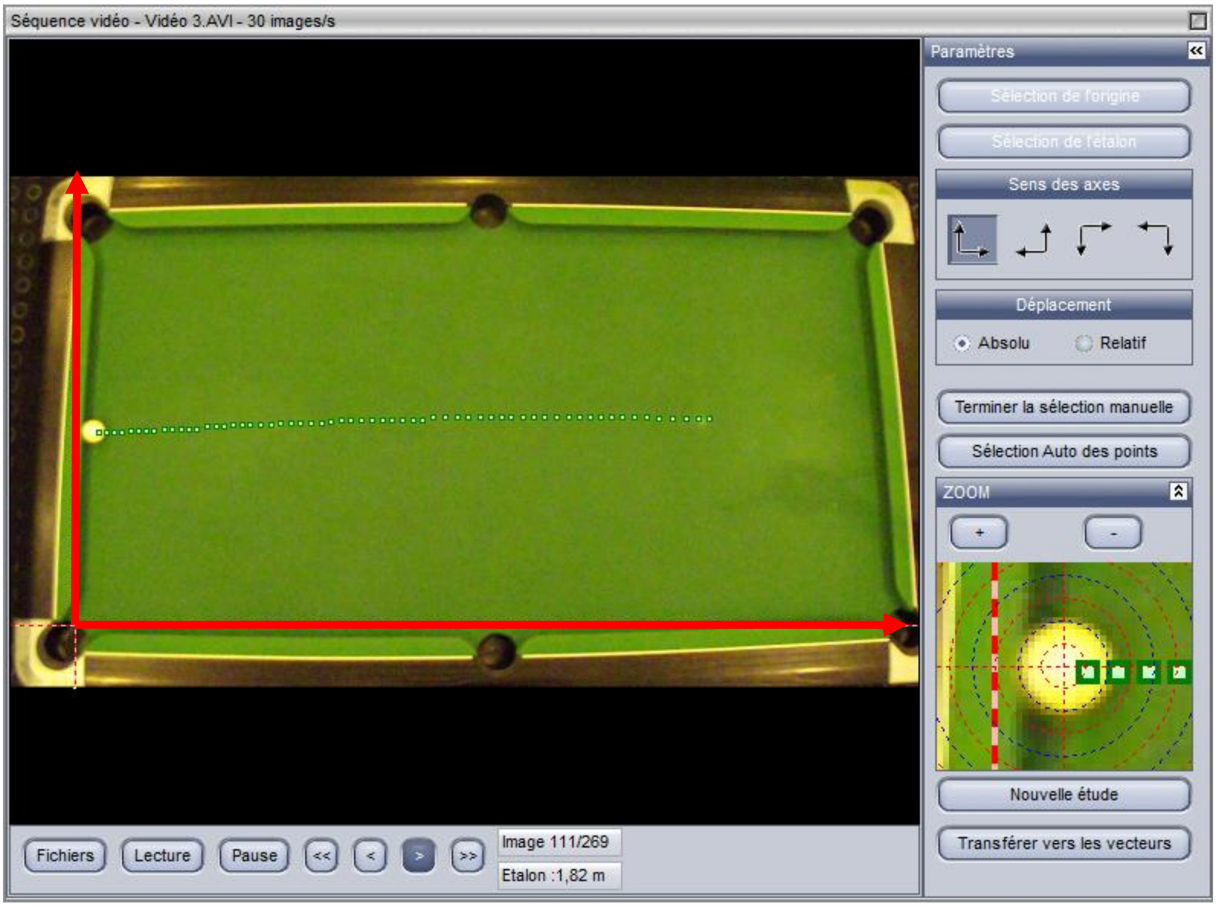
(Hypothèse majeure : les billes se déplacent sans effet)

I. Etude expérimentale des frottements.
II. Etude théorique des 3 principales lois du mouvement.
III. Conception des programmes de recherche des trajectoires.

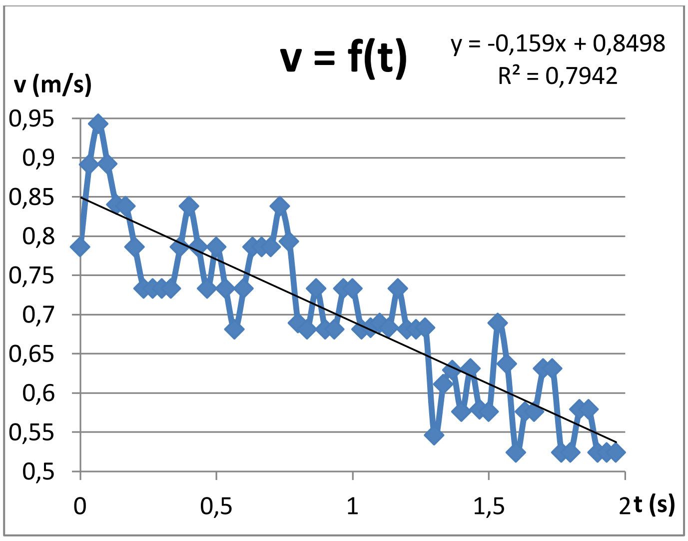


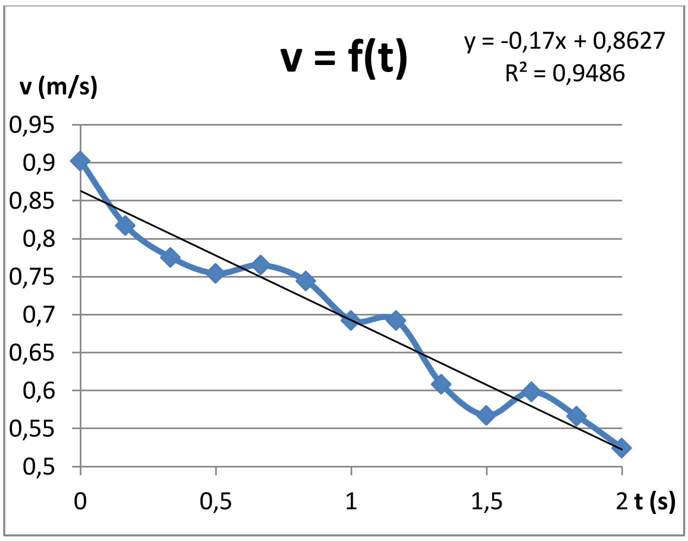
Etude expérimentale des frottements.

1) Pointage vidéo avec LatisPro



2) Interprétation des résultats expérimentaux



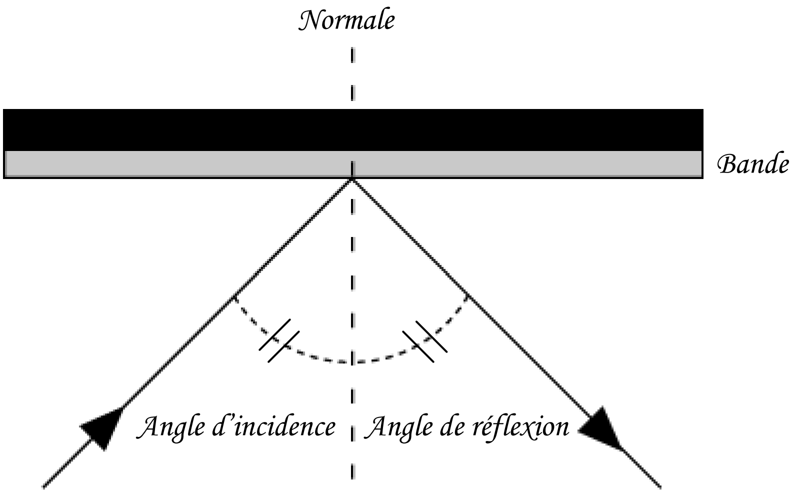


Incertitude sur la décélération (méthode des moindres carrés) :

$$a = -0{,}170 \pm 0{,}044\ m.s^{-2}$$

Etude théorique des 3 principales lois du mouvement.

1) Etude des rebonds



2) Etude des chocs

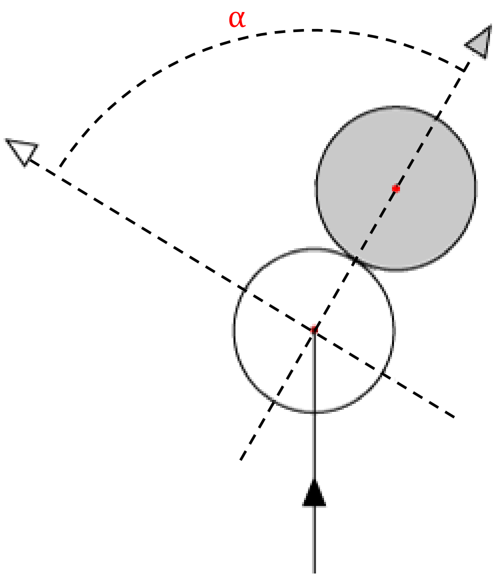
Chocs élastiques :

$$\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_1'} + \overrightarrow{p_2'}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2$$

On en déduit :

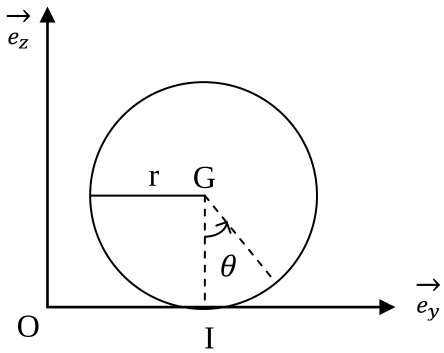
$$\propto = \ 90°$$



3) Etude des frottements

Cas du roulement avec glissement :

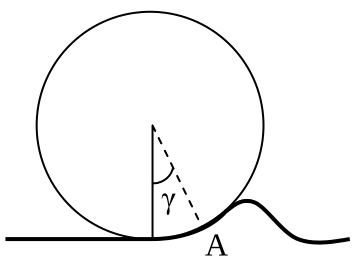
$$\overrightarrow{OG}(t) = \overrightarrow{OG}(0) + \overrightarrow{v_{/R}}(G,0) * t - \frac{fgt^2}{2}\frac{\overrightarrow{v_{/R}}(I,0)}{\|\overrightarrow{v_{/R}}(I,0)\|}$$



Cas du roulement sans glissement :

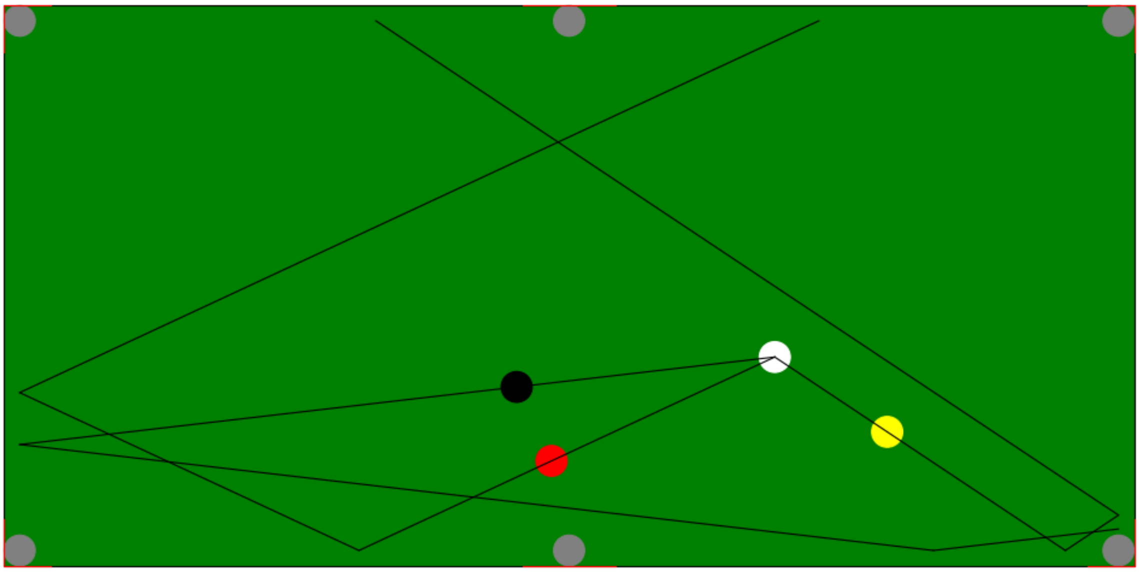
$$\overrightarrow{F} = -f_c mg\frac{\overrightarrow{v_{/R}}(G)}{\|\overrightarrow{v_{/R}}(G)\|}$$

$$f_c = \frac{\sin\gamma}{\frac{2}{5} + \cos\gamma} \approx \frac{2L}{gt^2}$$



Conception des programmes de recherche des trajectoires.

1) Réalisation d'une simulation graphique



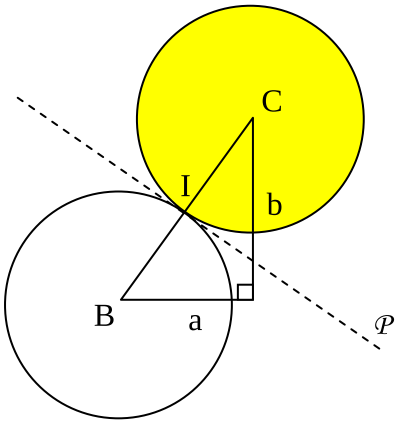
2) Position d'impact d'une bille

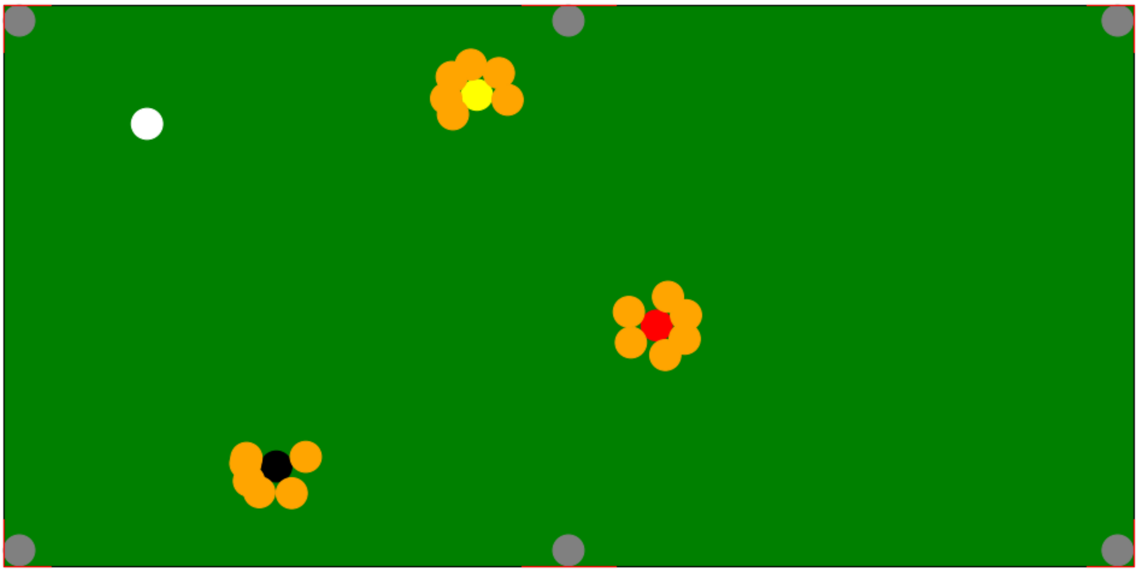
Pythagore : $a^2 + b^2 = 4R^2$

$$m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{b}{a}$$

On en déduit :

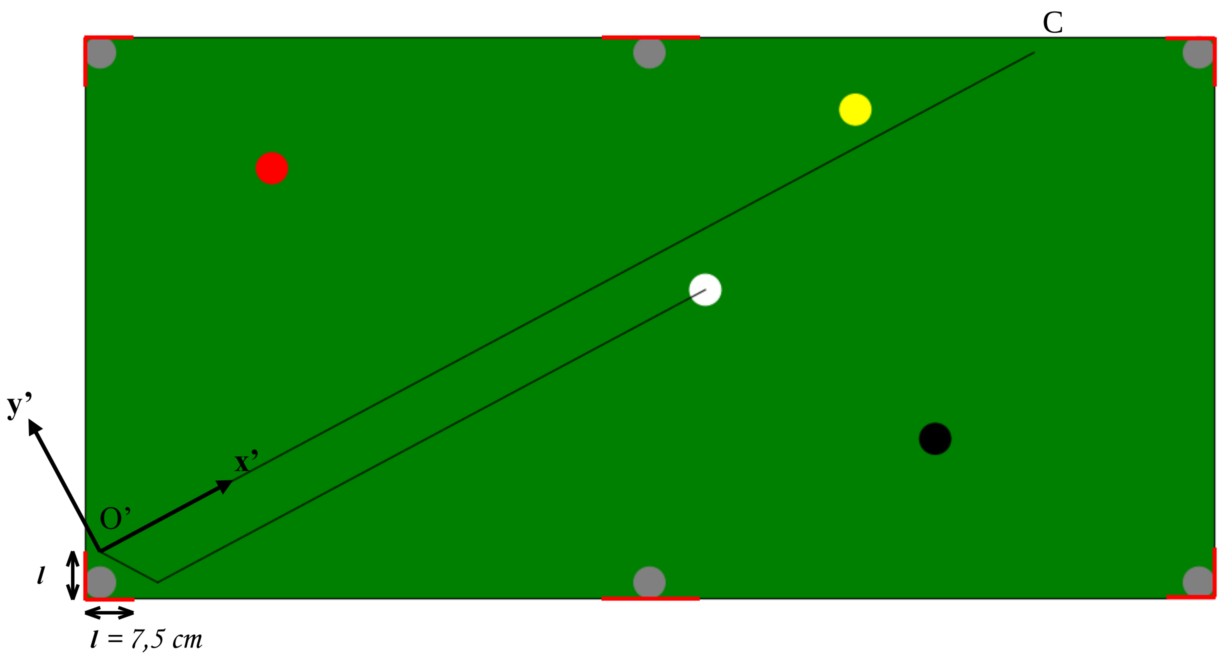
$$b = a * m \ et \ a = \pm \frac{2R}{\sqrt{1+m^2}} = \pm \frac{5}{\sqrt{1+m^2}}$$





Trajectoire en 2 rebonds sur bandes perpendiculaires.

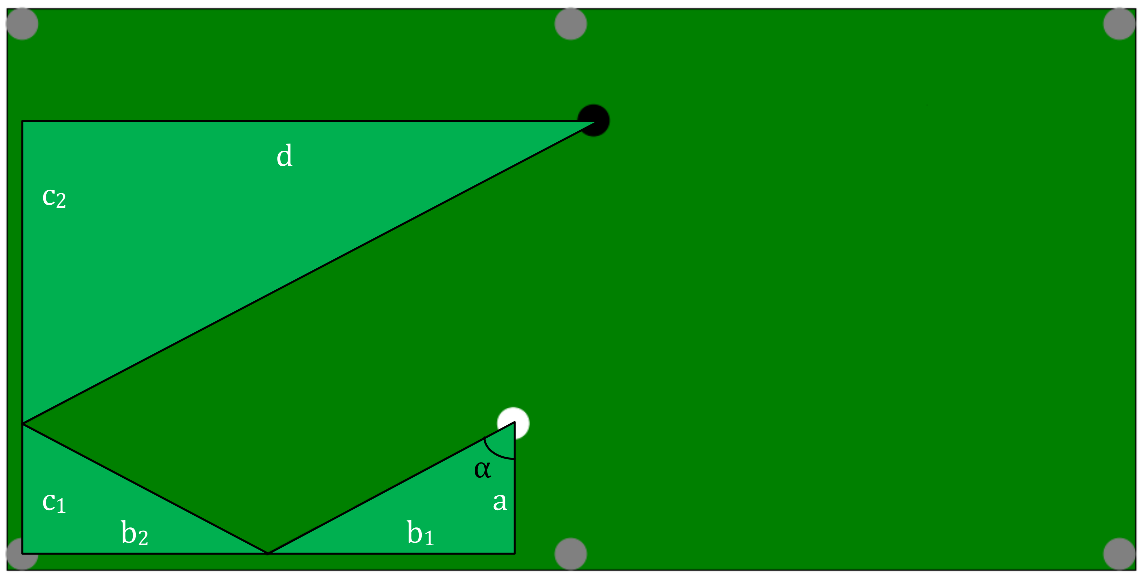
1) *Zone accessible*



$$\left(B, \frac{\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|}, \frac{\overrightarrow{BD}}{\|\overrightarrow{BD}\|}\right) = (O', \overrightarrow{x'}, \overrightarrow{y'})$$

$$P = \frac{1}{\|\overrightarrow{BC}\|}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{BC}} & -y_{\overrightarrow{BC}} \\ y_{\overrightarrow{BC}} & x_{\overrightarrow{BC}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}}\begin{pmatrix} x_C - x_B & -(y_C - y_B) \\ y_C - y_B & x_C - x_B \end{pmatrix}$$

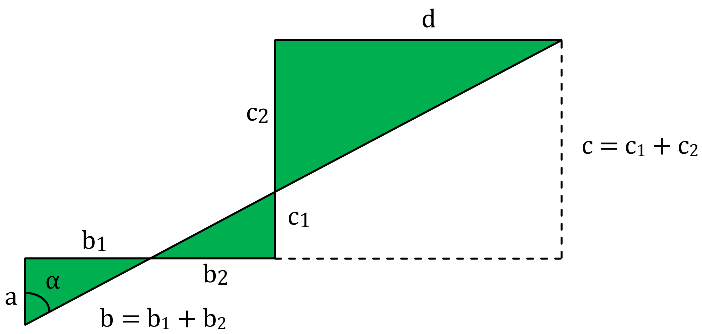
2) *Angle de tir*



Par théorème de Thalès :

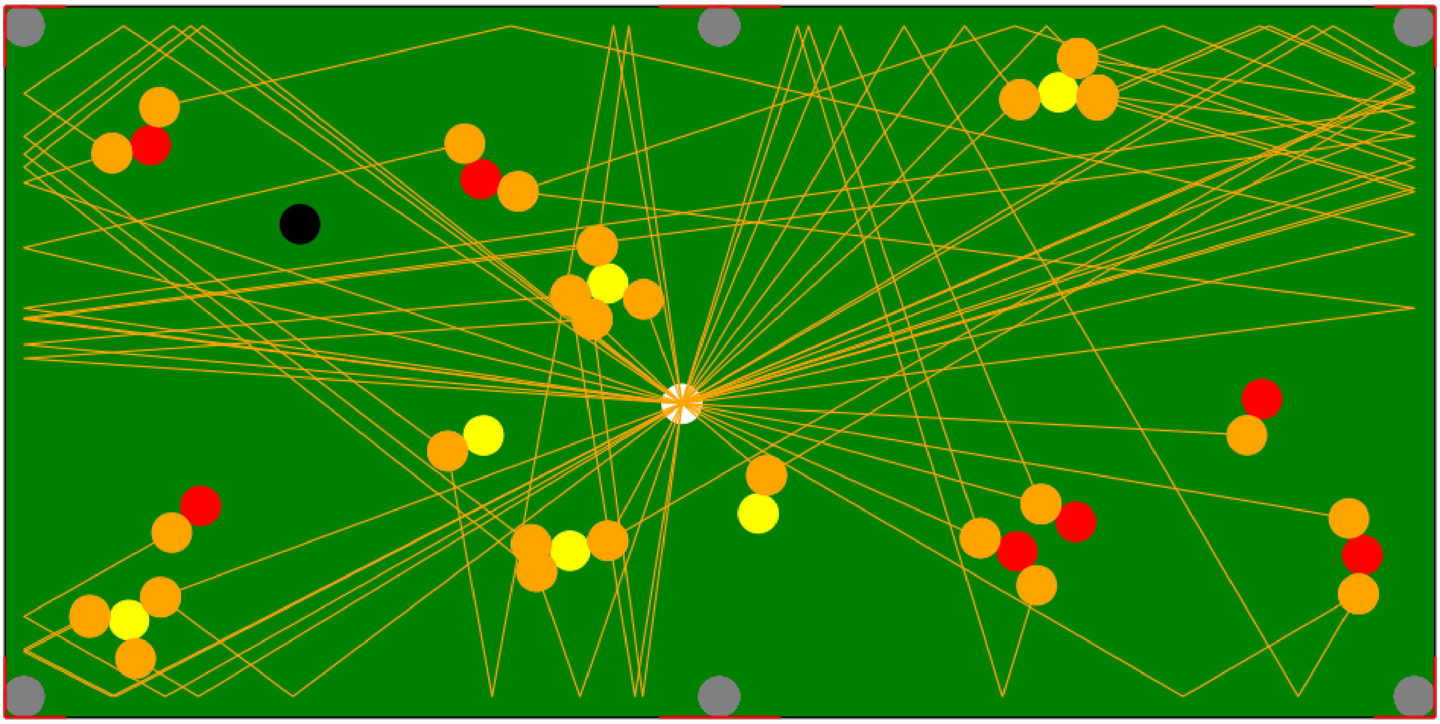
$$\frac{a}{c} = \frac{b_1}{b_2 + d} <=> b_1 = \frac{a(b+d)}{a+c}$$

$$\alpha = Arctan\left(\frac{b+d}{a+c}\right)$$



Synthèse des trajectoires et corrections du programme final.

1) Synthèse des trajectoires



Bille présente sur la trajectoire : $x' \geq 0$ et $|y'| < 2R$

2) Etude de la vitesse initiale

$$v(t) = v_0 - at$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

$$x_1 = v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2ax_1}}{a}$$

$$v_{1,av} = v_0 - at_1 = \sqrt{v_0^2 - 2ax_1}$$

$$v_{1,ap} = \eta * v_{1,av} \; ou \; \beta * v_{1,av}$$

Lorsque la bille est empochée après un rebond puis un choc :

$$v_f = \sqrt{(\beta\eta v_0)^2 - 2a((\beta\eta)^2 x_1 + \beta^2 x_2 + x_3)}$$

Par récurrence :

$$v_{f,n} = \sqrt{v_0^2 \prod_{i=1}^{n} \eta_i^2 - 2a \sum_{i=1}^{n+1} x_i \prod_{j=i}^{n} \eta_j^2}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2a \sum_{i=1}^{n+1} x_i \prod_{j=i}^{n} \eta_j^2}{\prod_{i=1}^{n} \eta_i^2}}$$

a : *Décélération de la bille liée aux frottements*

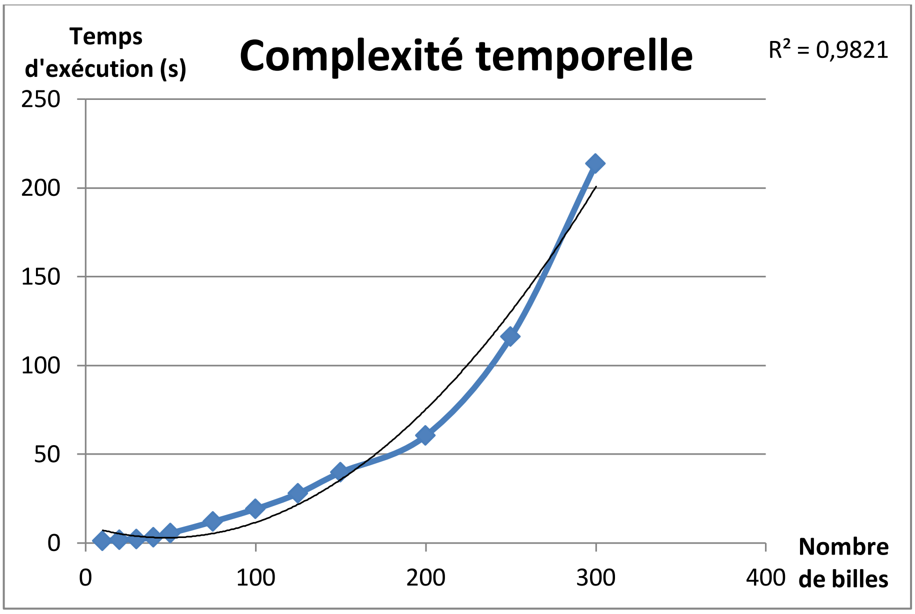
$(\eta_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$: *Coefficients de restitution de la vitesse de la bille blanche (η pour un rebond, β pour un choc)*

$(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$: *Distance parcourue avant le i-ème rebond*

x_{n+1} : *Distance parcourue après le choc avec la bille de couleur*

Conclusion.

1) Evaluation de la complexité temporelle



2) Etude statistique des trajectoires